

Una Nota sobre Burbujas Especulativas en Modelos con Expectativas Racionales.

Walter Esteban Sosa Escudero  
Universidad de San Andrés. Mayo de 1992

Contenido:

1. Introducción.
2. Burbujas y el rol de las expectativas.
3. Un marco formal para el análisis de las burbujas racionales.
  - 3.1 Dos ejemplos.
  - 3.2 La solución de las ecuaciones en diferencias estocásticas.
  - 3.3 Dos características importantes de las burbujas racionales.
4. Argumentos teóricos para descartar la presencia de burbujas especulativas.
  - 4.1 Burbujas en el precio de un activo.
  - 4.2 Burbujas en el nivel general de precios.
5. Evaluación empírica de la existencia de burbujas.
6. Comentarios finales.

1. Introducción

Burbujas especulativas, profecías autocumplidas, tulipmania, etc., son términos que la ciencia económica utiliza para referirse a "... situaciones en las que algunos precios se comportan de una manera tal que no parece poder explicarse de acuerdo a "economic fundamentals"<sup>12</sup>.

La historia económica reporta numerosos episodios en los que algunos precios parecen responder a una actividad fuertemente especulativa pero no es sino hasta la revolución del enfoque de expectativas racionales en la década del '70 que la teoría económica generó explicaciones apropiadas para este tipo de fenómenos.

El debate sobre el tema, lejos de estar cerrado, incluye discusiones acerca de la existencia misma del fenómeno, la posibilidad de caracterizar a las hiperinflaciones como burbujas y la relevancia de contrastar empíricamente su presencia, por mencionar algunos ejemplos.

<sup>1</sup> Calvo (1987)

<sup>2</sup> El tema involucra conceptos de difícil traducción al español. En algunos casos hemos preferido dejar los términos en inglés, a incurrir en equivocaciones que pudieran llevar a errores de interpretación.

El objetivo del presente trabajo es modesto. Pretende cubrir una brecha pedagógica entre los manuales tradicionales de macroeconomía y los artículos profesionales, repasando las distintas aproximaciones al tema en cuestión y evaluando diferentes posturas teóricas y empíricas sobre el mismo. En la sección 2 se discute con un poco más de detalle qué tipo de fenómenos son candidatos a ser catalogados como burbujas especulativas y cómo la literatura económica del siglo XX abordó el tema a partir de los distintos enfoques acerca de los procesos de formación de expectativas. En la sección 3 se formaliza esta discusión en términos del análisis de la solución general de las ecuaciones lineales estocásticas. La sección 4 repasa algunos argumentos teóricos utilizados para descartar la presencia de burbujas. Posteriormente, en la sección 5, se comentan algunos tests estadísticos y sus problemas asociados. El punto 6 presenta comentarios finales.

## 2. Burbujas y el rol de las expectativas.

Son numerosos los sucesos que la literatura económica tiende a asociar con términos como el de "burbuja especulativa". Ejemplos de ellos son la burbuja de Mississippi (Paris, 1719-20), la de "South Sea" (Londres, 1720), la famosa "Tulipmania" (Holanda 1636) o los procesos hiperinflacionarios de este siglo, incluyendo el experimentado por nuestro país en el año 1989<sup>3</sup>.

Determinar si es correcto referirse a estos episodios a través de eufemismos tan llamativos tiene que ver con el tipo de explicación que la ciencia económica es capaz de proporcionar para cada uno de ellos. La intuición detrás de estos términos es que procesos como los comentados tienen poco que ver con "economic fundamentals" y mucho que ver con actividades fuertemente especulativas y, por lo tanto, relegables al ámbito de lo inexplicable.

Tal vez la definición de burbuja que ofrece Kindleberger (1987), en la misma obra en la que encontramos la de Calvo, ayude a entender esto:

*"Una burbuja puede ser definida, vagamente, como un rápido incremento en el precio de un activo o de un conjunto de activos en un proceso continuo, generando expectativas de futuros incrementos y atrayendo nuevos compradores, generalmente especuladores interesados en obtener beneficios de la compra-venta del activo más que de su uso..."*

Obviamente, estos sucesos no pasaron desapercibidos para la historia del pensamiento económico. Keynes (1936), en su discusión sobre El Estado de las Expectativas a Largo Plazo, advierte que "...Una valoración conven-

---

<sup>3</sup> Una revisión crítica de algunos de estos fenómenos puede consultarse en Garber (1989) y (1990).

*cional que se establece como resultado de la psicología de masa de gran número de individuos ignorantes está sujeta a modificaciones violentas debidas a un cambio violento en la opinión como consecuencia de factores que en realidad no significan gran cosa para el rendimiento probable..." y más adelante señala el problema de "...anticipar lo que la opinión promedio espera que sea la opinión promedio..."*

Las explicaciones que provee la teoría económica acerca de la existencia de estos fenómenos especulativos llegan de la mano de la formulación de teorías endógenas de los procesos de formación de expectativas:

La introducción de la hipótesis de expectativas racionales provee un marco adecuado para el análisis de los sucesos especulativos. Partiendo de que los fenómenos económicos son dinámicos por naturaleza y que, por lo tanto, involucran decisiones que tienen que ver con el futuro, este enfoque propone un proceso de formación de expectativas en el cual los individuos no cometen errores sistemáticos en sus predicciones, obteniendo estas últimas a partir del cálculo de las esperanzas matemáticas derivadas de la "correcta" forma estructural del modelo de una economía, condicionales a la información disponible en el momento en el cual las expectativas se forman.

Una propiedad habitual de los modelos que incorporan esta hipótesis es que las expectativas son "autocumplidas" en el sentido de que el precio de un activo depende de los valores esperados del mismo en el futuro. Esto permite la existencia de una multiplicidad de soluciones para estos modelos que admiten senderos explosivos de equilibrio en el precio de un activo, asociados a actividades especulativas no relacionadas con "market fundamentals".

Este tipo de explicaciones constituye una primera aproximación de la teoría económica al fenómeno de burbujas especulativas: el precio de un activo explota porque así lo creen los agentes y además constituye una situación de equilibrio. Esto no refleja una debilidad del enfoque de expectativas racionales sino una característica ineludible de la dinámica de los procesos que involucran expectativas formadas "mirando hacia adelante".

Los programas de investigación sobre el tema siguieron hasta el momento dos líneas bien diferenciadas. Por un lado se intentó detectar, a través de tests estadísticos, comportamientos especulativos explosivos en los sucesos históricos mencionados que permitieran evidenciar la presencia de burbujas.

Por otro lado, utilizando argumentos teóricos, se buscaron situaciones en las cuales la existencia de burbujas especulativas violara alguna restricción del sistema que las genera. Este tipo de argumentos sirve para descartar la presencia de burbujas o, en todo caso, para describir las situaciones bajo las cuales las burbujas pueden existir.

En los puntos 4 y 5 se revisan ambas aproximaciones. Como paso previo, extenderemos la discusión en un ámbito más formal.

### 3. Un marco formal para el análisis de las burbujas racionales.

El problema de las burbujas especulativas en modelos con expectativas racionales puede ser fácilmente abordado a través del análisis de las soluciones de una ecuación en diferencias estocástica del tipo:

$$(1) p_t = g E[p_{t+1}] + c x_t$$

donde  $E[p_{t+1}]$  es la esperanza matemática de  $p_{t+1}$  evaluada en el momento  $t$  en base a la información disponible en ese momento,  $x_t$  es una variable exógena y "g" y "c" son parámetros constantes.

Este tipo de ecuaciones (lineales y de primer orden) caracterizan los procesos que gobiernan la dinámica de los precios en numerosos ejemplos con agentes que forman sus expectativas racionalmente.

#### 3.1 Dos ejemplos

Un primer caso podría ser el de un activo con precio  $p_t$  que paga dividendos  $x_t$  en cada período. Si los agentes no son adversos al riesgo y descuentan la utilidad futura a una tasa constante  $r$ , el precio del activo en  $t$  será igual al valor presente descontado de la suma del dividendo que paga el activo, en el próximo período más el precio al cual el agente espera poder vender el activo en el período siguiente:

$$(2) p_t = \frac{E(x_t + p_{t+1})}{1 + r}$$

reordenando (2), llegamos a (1), con:

$$g = 1 / (1+r) \quad \text{y} \quad c = g$$

Otro ejemplo surge de la forma logarítmica de la ecuación de equilibrio en el mercado de dinero en el modelo de Cagan con expectativas racionales. En este caso, la oferta nominal de dinero es exógena y la demanda real de dinero es una función lineal en logaritmos de la tasa de inflación esperada. En equilibrio:

$$(3) x_t - p_t = -a [E(p_{t+1}) - p_t]$$

donde en este caso  $x$  y  $p$  representan los logaritmos naturales de la cantidad nominal de dinero y del nivel de precios respectivamente, y "a"

la semielasticidad de la demanda de dinero con respecto a la tasa esperada de inflación. Nuevamente, reordenando (3) llegamos a (1) con:

$$g = a / (1+a) \quad y \quad c = 1 - g$$

La ecuación (1) y sus interpretaciones obtenidas en (2) y (3) nos indican que el precio (o el nivel general de precios) depende del estado de otra variable exógena (los dividendos o la cantidad de dinero en cada caso) y del precio esperado para el período siguiente. Cualquier sendero de precios que satisfaga la ecuación (1) será de equilibrio. Una característica de estas ecuaciones es que admiten infinitos senderos de equilibrio para un sendero dado de la variable exógena. O sea que, en esta etapa del análisis, ni la corriente de dividendos en el primer caso, ni las cantidades nominales de dinero en el segundo permiten caracterizar unívocamente el nivel de precios.

Intuitivamente, en el modelo de Cagan en donde los agentes forman sus expectativas racionalmente, el nivel de precios podría subir porque los agentes así lo esperan, aún manteniendo constante el stock de dinero nominal. Esto es posible porque el propio nivel de precios ajusta para equilibrar la oferta con la demanda de saldos reales. Por lo tanto, expectativas de futuros aumentos de precios reducen la demanda real de dinero provocando aumentos en el nivel de precios para eliminar el exceso de oferta, convalidando la creencia inflacionaria de los agentes. En este sentido es que se habla de "profecía autocumplida" en los senderos de precios de estos modelos.

### 3.2 La solución de las ecuaciones en diferencias estocásticas.

La solución general de la ecuación (1) es<sup>4</sup>:

$$p_t = p^*_t + b_t$$

$$\text{con } p^*_t = c \sum_{j=0}^{\infty} g^j E(x_{t+j})$$

<sup>4</sup> Son varios los métodos utilizados para resolver este tipo de problemas. Ejemplos de ellos son el de "factorización" y el de "coeficientes indeterminados". Estos involucran la "ley de proyecciones iteradas". Al respecto, consúltese Sargent (1987) Capítulos 9 a 11, Taylor (1986) o McCallum (1983).

y  $b_t$  es cualquier secuencia que satisfaga la siguiente ecuación en diferencias estocástica<sup>5</sup>:

$$(4) \quad b_t = g E(b_{t+1})$$

La solución  $p_t^*$  es conocida como la "fundamentals solution" ya que depende de la secuencia de valores que adopte la variable exógena. En el caso del precio del activo, por ejemplo, indica que este será igual a la suma de los valores presentes descontados de los dividendos.

La segunda parte de la solución general,  $b_t$ , es el componente de "burbuja" que además de no estar relacionado con valores de la variable exógena tiene un comportamiento divergente para valores iniciales de la burbuja distintos de cero, y de  $g$  menores que 1.

Esto constituye una sencilla aproximación formal al problema de las burbujas especulativas. Intuitivamente, en el caso del activo, si por alguna razón los agentes creyeran que el precio del activo fuera a aumentar sin que haya variaciones en la corriente de dividendos futuros, estarían dispuestos a pagar un precio superior al valor presente de los dividendos descontados, convalidando el aumento de precios esperado.

Una simplificación fácil de analizar es cuando  $p_t$  sigue un proceso determinístico y  $x_t$  es una constante<sup>6</sup>, en cuyo caso (1) es una ecuación en diferencias lineal homogénea de primer orden, cuya solución definida para un valor inicial de  $p_t$  igual a  $p_0$  es:

$$p_t = \left\{ p_0 - \frac{c}{1-g} x \right\} (1/g)^t + \frac{c}{1-g} x$$

que en términos de lo analizado equivaldría a:

$$p_t^* = c/(1-g) x$$

<sup>5</sup> Este requisito surge de que si  $p_t$  es una solución para la ecuación (1), se cumple también que:

$$E(p_{t+1}) = E(p_{t+1}^*) + E(b_{t+1})$$

Reemplazando en (1), se debe verificar que:

$$p_t^* + b_t = g E(p_{t+1}^*) + g E(b_{t+1}) + c x_t$$

pero como  $p_t^*$  es una solución para (1), la condición anterior resulta:

$$b_t = g E(b_{t+1})$$

<sup>6</sup> Véase Taylor (1986) para un análisis detallado de las formas alternativas que puede adoptar la variable exógena y sus interpretaciones en términos de shocks de política económica.

y

$$b_t = b_0 (1/g)^t \quad ; \quad b_0 = p_0 - [c/(1-g)]x$$

Si "a" es un valor menor que 1, cualquier valor inicial de la burbuja ( $b_0$ ) distinto de cero implicará procesos divergentes en los precios.

Existen infinitos senderos de equilibrio (que satisfacen (1)) asociados a infinitos valores que puede adoptar el precio inicial ( $p_0$ ). Solo si  $p_0$  es igual a la solución de "fundamental" el sistema no explota. Esto es lo que se conoce como el problema de multiplicidad de soluciones en los modelos con expectativas racionales.<sup>7</sup>

### 3.3 Dos características importantes de las burbujas racionales.

Volviendo al ejemplo estocástico planteado en (1), nótese que las soluciones para la ecuación en diferencias estocástica (4) (que define el comportamiento de la burbuja), satisfacen la siguiente ecuación:

$$(5) \quad b_{t+1} - b_t (1/g) = u_{t+1}$$

siendo  $u_{t+1}$  una variable aleatoria generada por un proceso estocástico que satisface:

$$E_{t+j} u_{t+1} = 0 \quad \text{para todo } j \geq 0$$

A partir de este resultado, Diba y Grossman (1988) señalan 2 condiciones importantes que cumplen las burbujas racionales caracterizadas por procesos como el obtenido en (4):

1) Si existen argumentos previos que permitan descartar la existencia de burbujas negativas y no existe una burbuja racional en un momento  $t$  ( $t \geq 0$ ), esta no puede comenzar en ningún momento futuro. Por lo tanto, si una burbuja existe debió comenzar en el momento cero.

<sup>7</sup> Como comentamos anteriormente, esto no es una "enfermedad" atribuible al supuesto de expectativas racionales sino una característica inevitable de los modelos dinámicos que involucran expectativas. Esta discusión es analizada claramente en McCallum (1983).

2) Si una burbuja existe, existirá para siempre o "explotará" en algún momento y nunca volverá a recomenzar<sup>8</sup>.

Como notan estos dos autores, si una burbuja existe, y por la condición 1 debió comenzar en el momento inicial (en el momento de emisión de dinero, en términos del modelo de Cagan), implica que los agentes que anticiparon la introducción del activo, esperaron que tuviera un valor superior al de "fundamentals". Por lo tanto, la existencia de burbujas racionales requiere incompletitud de mercados ya que si los agentes hubieran podido, antes de la aparición del activo, negociar contratos contingentes en los cuales intercambiar el activo en cuestión por otros bienes, la burbuja se hubiera eliminado.

Hemos visto cómo mecanismos dinámicos como el propuesto en (1) son capaces de admitir senderos de equilibrio divergentes. Esta sería una primera aproximación a las burbujas como una situación posible en un esquema en donde los agentes forman sus expectativas "mirando hacia adelante".

#### 4. Argumentos teóricos para descartar la presencia de burbujas.

En el análisis anterior, la existencia de burbujas proviene de componentes explosivos incluidos en las soluciones de la ecuación (1). Una cuestión importante de notar es que, generalmente, las soluciones deben satisfacer condiciones adicionales a las impuestas por la ecuación (1), propias del contexto en el cual fueron obtenidas.

En esta sección analizamos, con dos ejemplos sencillos, la naturaleza de estos requisitos adicionales y bajo qué circunstancias son satisfechos por senderos divergentes en los precios. El incumplimiento con alguno de estos requisitos permitirá descartar la posibilidad de existencia de burbujas.

##### 4.1 Burbujas en el precio de un activo.

Supongamos una economía en la cual un consumidor representativo debe elegir una estrategia que le permita maximizar el valor presente descontado de su utilidad:

---

<sup>8</sup> Formalmente, si las burbujas no cumplieran con alguna de las condiciones (se iniciaran en  $t > 0$  o, explotaran y luego recomenzaran), no satisficieran los supuestos adoptados sobre el término aleatorio  $u_t$  en la ecuación (5). La demostración puede consultarse en Diba y Grossman (1988).

<sup>9</sup> El siguiente caso es una simplificación de los analizados por Obstfeld y Rogoff (1983) y Sargent (1987) Cap.12.



$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

en donde  $c_t$  es el consumo,  $u(c_t)$  es una función de utilidad que satisface  $u' > 0$  y  $u'' < 0$  y  $\beta$  es una constante positiva y menor que 1, a la cual el individuo descuenta su utilidad futura.

El individuo recibe en cada momento un ingreso de transferencia  $y_t$  y puede elegir entre consumir o mantener  $k_t$  unidades de un bien de capital no amortizable cuyo valor, en términos del bien de consumo, es  $q_t$  y que tiene un rendimiento de  $r$  unidades del bien de consumo en cada período.

El individuo maximiza  $V$  sujeto a la siguiente restricción presupuestaria:

$$(q_t k_t - q_{t-1} k_{t-1}) + c_t = r k_{t-1} + (q_t - q_{t-1}) k_{t-1} + y_t$$

que indica simplemente que el individuo financia sus variaciones en la tenencia de bienes de capital y su consumo con la suma de los dividendos y la ganancia de capital obtenidas por mantener el bien  $k$  y el ingreso de transferencia  $y_t$ .

Las soluciones a este problema de optimización intertemporal deben satisfacer las siguientes condiciones de primer orden<sup>10</sup>:

$$(6) \quad u'(c_t) q_t = \beta u'(c_{t+1}) [q_{t+1} + r] \quad y,$$

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{\beta^n u'(c_{t+n}) q_{t+n} k_{t+n}\} = 0$$

La condición (6) es conocida como la "ecuación de Euler" y dice que en el sendero óptimo el individuo no puede obtener ninguna ganancia, en términos de utilidad, de comprar el bien de capital en  $t$  y venderlo en el futuro (obviamente, si pudiera hacer tal reasignación el sendero no sería óptimo) ya que a lo largo de este el valor de la utilidad marginal del consumo en  $t$  es igual al valor descontado de la utilidad marginal del consumo en el período siguiente, ambas valuadas en términos del poder adquisitivo del bien de capital en cada uno de los períodos (en  $t$  el propio precio y en el período siguiente el precio más el dividendo)

La condición (7) es la "condición de transversalidad" que garantiza que el individuo no solo no pueda obtener ganancias adicionales vendiendo

<sup>10</sup> Una introducción a este tipo de problemas de optimización intertemporal en tiempo discreto puede ser Takayama (1985) Cap.8 o Dixit (1989) Cap. 10. También puede consultarse Sargent (1987) Cap.9.

en el presente y comprando capital en el futuro sino que tampoco pueda hacerlo vendiendo y nunca recomprando. Si esta condición no se satisficiera, el sendero en cuestión no sería óptimo ya que el individuo estaría desaprovechando alguna oportunidad de reconvertir capital en consumo en algún período finito.

Si el stock de capital es fijo el producto también lo es. Como en equilibrio el consumo iguala al producto, podemos reescribir la condición (6) como:

$$q_t = \beta (q_{t+1} + r)$$

que es una expresión con las mismas características que la ecuación (1) analizada en el punto anterior. La solución de esta ecuación en diferencias, definida para algún valor inicial del precio del bien de capital ( $q_0$ ), es:

$$(8) \quad q_t = (q_0 - q^*) (1/\beta)^t + q^*$$

$$\text{con } q^* = \beta r / (1 - \beta).$$

Aquí el primer sumando del segundo miembro de (8) es la burbuja y el segundo la solución de "fundamentals".

Si el precio inicial del activo fuera mayor que el valor de "fundamentals" el precio tendría un comportamiento explosivo. Dado los supuestos del modelo (stock de capital fijo), dicho sendero violaría la condición de transversalidad ya que el límite sería un valor estrictamente positivo. Por lo tanto, se podrían descartar las soluciones explosivas (burbujas positivas) ya que no satisfacen las condiciones de primer orden del problema de optimización.

Existen numerosas situaciones en las cuales la existencia de una burbuja violaría un supuesto o una condición de optimalidad propia del contexto del cual puede ser obtenida. Los más comunes son los siguientes:

a) Si un bien tiene un sustituto disponible en oferta infinitamente elástica no puede haber burbujas positivas en el precio de este bien, ya que existiera algún precio finito (aunque probablemente muy alto) al cual los individuos puedan hacerse del sustituto cuando el precio del bien en cuestión tienda a infinito. El ejemplo típico es el caso de la energía solar como sustituto del petróleo.

b) Si un bien es de disposición libre no puede haber burbujas negativas en el precio de este ya que los agentes se podrán deshacer del bien gratuitamente antes de que los precios se vuelvan negativos.

c) Si en la economía hay un número finito de agentes con vida infinita, el precio de un activo no puede exceder el valor presente

descontado de los dividendos ya que en este caso todos los agentes intentarían desprenderse del activo creando un exceso de oferta permanente. Si por el contrario, el precio del activo estuviera por debajo del valor presente de los dividendos, todos desearían comprar el activo y mantenerlo para siempre creando un exceso de demanda. Por lo tanto, ningún precio distinto del de "fundamentals" es de equilibrio.

d) Si un activo está sujeto a una condición terminal (por ejemplo un bono), la burbuja debe valer cero en el "momento terminal" y, por extensión, debe valer cero siempre. Por lo tanto no puede haber burbujas en el precio de activos sujetos a condiciones terminales.

e) Un argumento comúnmente utilizado para descartar burbujas positivas consiste en que si la burbuja crece exponencialmente a la tasa de interés, en algún momento tendrá un tamaño demasiado grande con respecto al de la economía, por lo que los agentes no esperarían que tal cosa ocurra. Este argumento pierde validez si la economía es "dinámicamente ineficiente" ya que en esta situación la economía crece a una tasa mayor que la tasa de interés<sup>11</sup> posibilitando la existencia de burbujas.

#### 4.2 Burbujas en el nivel general de precios.

El dinero utilizado para realizar transacciones posee características que lo diferencian sustancialmente de otros bienes, como por ejemplo, que sus servicios no son independientes de su precio. Esto inducirá a que el análisis acerca de la posibilidad de existencia de burbujas concluya en una discusión acerca del rol esencial del dinero.<sup>12</sup>

El siguiente ejemplo<sup>13</sup> en tiempo continuo permitirá pormenorizar estas cuestiones. Supongamos un individuo cuyo objetivo consiste en maximizar el valor presente descontado de sus utilidades:

$$(9) \quad V = \int_s^{\infty} u(c_t, m_t) \exp(-\delta(t-s)) dt$$

en donde  $c_t$  es el consumo,  $m_t$  es la cantidad real de dinero,  $\delta$  es la tasa a la cual los individuos descuentan la utilidad futura,  $u()$  es una función

<sup>11</sup> La "regla de oro" de la acumulación dice que la productividad marginal del capital debe ser igual a la tasa de crecimiento de la población. Si la economía crece a una tasa mayor que la tasa de interés quiere decir que la población podría estar mejor reduciendo el stock de capital. Al respecto véase Blanchard y Fischer (1989) Caps. 2 y 4.

<sup>12</sup> Como parece concluir cualquier discusión sobre dinero.

<sup>13</sup> Que otra versión simplificada, esta vez de Blanchard y Fisher (1989) Cap.5 y Sidrauski (1967).

de utilidad<sup>14</sup> creciente en sus argumentos, estrictamente cóncava y diferenciable en el intervalo abierto  $(0, \infty)$  que satisface las "condiciones de Inada" :

$$\lim_{c \rightarrow 0} U'_c = \infty, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} U'_c = 0, \quad \lim_{m \rightarrow 0} U'_m = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U'_m = 0$$

La restricción presupuestaria sujeto a la cual los agentes maximizan la expresión (9) es la siguiente:

$$c_t + dm_t/dt = y - \pi_t m_t$$

que expresa que el consumo más la variación en las tenencias reales de saldos monetarios deben ser financiadas con un flujo de ingresos exógeno y constante ( $y$ ) menos la pérdida de valor por mantener dinero (impuesto inflacionario).

La solución al problema de optimización temporal puede ser caracterizada acudiendo al "principio del máximo"<sup>15</sup> que parte de la construcción de una "función Hamiltoniana" definida como:

$$H_t = u(c_t, m_t) \exp(-\delta(t-s)) + \mu_t \{y - \pi m_t - c_t\}$$

en donde por facilidad de cálculo elegiremos la siguiente expresión para la variable de coestado  $\mu_t$ <sup>16</sup>:

$$\mu_t = l_t \exp(-\delta(t-s))$$

Las condiciones de primer orden requieren que:

1.  $dH_t/dc_t = 0$  , lo que implica:  $U_c = l_t$
2.  $d\mu_t/dt = -dH_t/dm_t$ , que equivale a:  
 $(dl_t/dt)/l_t = \delta + \pi_t - \varphi(U_m/l_t)$  , y
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} l_t \exp(-\delta t) m_t = 0$

<sup>14</sup> La inclusión de los saldos reales en la función de utilidad no restringe el análisis. Gray (1984) presenta resultados similares en un enfoque de costos de transacciones en donde  $m$  no aparece en la función de utilidad.

<sup>15</sup> Ver Takayama (1985) Cap.8 o Dixit (19xx) Cap.10

<sup>16</sup> La variable de coestado es el equivalente dinámico al parámetro de Lagrange en los problemas de optimización estática.

que es la condición de transversalidad asociada al problema de optimización y que tiene una interpretación similar al caso anteriormente analizado<sup>17</sup>.

Si el ingreso ("y") es constante, en equilibrio  $c_t$  también lo es ya que en estos modelos el consumo de cada individuo iguala a su ingreso, lo que implica que la variable de coestado es también una constante (1). Si elegimos las unidades de modo tal que esta valga la unidad, la condición 2 resulta:

$$(10) \quad U_m = \delta + \pi$$

Si la oferta nominal de dinero crece en forma constante a la tasa  $\sigma$ , la tasa de variación de la oferta real de dinero será igual a:

$$(11) \quad \dot{m}/m = \sigma - \pi$$

despejando en (10) la tasa de inflación y reemplazando en (11) obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria (no lineal) que representa la condición de primer orden del problema de optimización:

$$(12) \quad \dot{m}/m = \delta + \sigma - U_m$$

Existe por lo menos un valor de  $m$  positivo en el cual el sistema se encuentra en estado estacionario ( $m^*$ )<sup>18</sup>, y por lo tanto la cantidad de dinero real no varía, cumpliéndose, a partir de (12), que:

$$(13) \quad \delta + \sigma = U_m$$

Este nivel  $m^*$  es un equilibrio inestable, ya que si  $m$  fuera mayor que  $m^*$  la utilidad marginal del dinero ( $U_m$ ) será menor que  $\delta + \sigma$  y, por la condición (12),  $m$  crecerá alejándose del equilibrio. Lo contrario sucede si  $m$  es menor que  $m^*$ . Podemos evaluar esta situación en el Gráfico No.1.

INSERTAR GRAFICO 1

---

<sup>17</sup> En Gray (1984) se puede consultar una interpretación intuitiva en términos de arbitrajes.

<sup>18</sup> Si bien el objeto estudiado es el comportamiento del nivel general de precios, el análisis se lleva a cabo a través de la cantidad real de dinero por simplicidad analítica. Esto es posible porque la cantidad nominal de dinero crece a una tasa constante.

Notese que  $m^*$  satisface la condición de transversalidad, ya que  $m_t$  será igual a la constante  $m^*$  y por lo tanto el límite se anulará cuando  $t$  tiende a infinito.

Senderos de  $m$  cuyo valor inicial fuese mayor que  $m^*$  no satisfacen la condición de transversalidad. Esto lo podemos analizar de la siguiente manera. Comencemos por reexpresar la condición de transversalidad haciendo uso de la expresión (12), que implica:

$$m_t = m_0 \exp(gt)$$

en donde  $g$  es la tasa de crecimiento de la cantidad real de dinero y  $m_0$  es el valor inicial de  $m$ <sup>19</sup>. Reemplazando este resultado en la condición de transversalidad, esta resulta:

$$(14) \lim_{t \rightarrow \infty} [m_0 \exp(g - \delta)t] = 0$$

en donde se puede observar que para que la condición de transversalidad se satisfaga tiene que ocurrir que la cantidad real de dinero crezca menos rápido que la tasa a la cual los individuos descuentan su utilidad, de modo que la expresión exponencial en (14) se anule cuando  $t$  tiende a infinito. Como en este caso mientras el tiempo tiende a infinito también lo hace la cantidad real de dinero, la condición (14) no es satisfecha ya que habiendo supuesto que  $\lim_{m \rightarrow \infty} U_m = 0$ , se verifica que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_t = \lim_{m \rightarrow \infty} (m/m) = \delta + \sigma$$

que demuestra que en estos senderos explosivos la cantidad real de dinero crece a una tasa  $(\delta + \sigma)$ , obviamente mayor que  $\delta$  violando entonces la condición de transversalidad. Utilizando este argumento, concluimos que no puede haber burbujas deflacionarias que hicieran crecer indefinidamente la cantidad real de dinero.<sup>20</sup>

<sup>19</sup> Esta es una demostración intuitiva. En rigor, la expresión que define  $g$  a partir de (12) es:

$$g = (\mu + \sigma) - \left\{ \int_0^t U_m(m_s) ds \right\} / t$$

Una demostración más formal puede consultarse en Obstfeld y Rogoff (1986).

<sup>20</sup> Existen condiciones, aunque bastante extremas, bajo las cuales si la cantidad de dinero no crece no se puede descartar este tipo de burbujas. Obstfeld y Rogoff (1986) comentan un ejemplo de Calvo G. y Fernandez R. en donde esto ocurre.

El caso en el que  $m_0$  es menor que  $m^*$  es un poco más problemático de analizar. Esto se debe a que concentramos nuestro análisis en los senderos positivos de saldos reales. Si el sistema presenta un estado estacionario en el nivel de dinero real nulo, a medida que  $t$  tiende a infinito la cantidad de dinero cae aproximándose infinitamente a cero y, por lo tanto, la condición de transversalidad es satisfecha. Entonces, no podríamos descartar senderos hiperinflacionarios bajo estas condiciones.

Pero podría darse el caso en el cual el sistema no presente un estado estacionario en  $m = 0$  y, por lo tanto, la cantidad de dinero tienda a ser negativa cuando la cantidad real de dinero sea infinitamente pequeña. Como no podemos aceptar la existencia de valores negativos para  $m$ , podemos descartar estos senderos explosivos del nivel general de precios si se da esta situación.

Reexpresando (12) como:

$$(14) \quad \dot{m} = (\delta + \sigma) m - U_m m$$

podemos analizar estos resultados. Notese que el límite de  $m$  cuando  $m$  tiende a cero adopta una forma indeterminada ya que  $U_m$  tiende a infinito mientras que  $m$  tiende a cero. Si suponemos que:

$$\lim_{m \rightarrow 0} U_m m = 0, \text{ entonces:}$$

$$(15) \quad \lim_{m \rightarrow 0} \dot{m} = 0$$

mientras que si:

$$(16) \quad \lim_{m \rightarrow 0} U_m m \rightarrow 0, \text{ implica:}$$

$$(17) \quad \lim_{m \rightarrow 0} \dot{m} < 0$$

En la situación en la cual se verifica (15), la cantidad de dinero y la tasa de variación de esta se aproximan indefinidamente a cero cumpliéndose la condición de transversalidad y, por lo tanto, tales senderos hiperinflacionarios no pueden ser descartados como solución al problema de optimización.

En el caso en que se verifique (16), para  $m$  aproximándose infinitamente a 0 el sistema tiende a llevar la cantidad de dinero a valores negativos, lo que es imposible. Por lo tanto, este razonamiento permite descartar estos senderos como soluciones posibles.

Este último caso es bastante poco intuitivo por las siguientes razones. Se puede demostrar que la condición (16) implica que:

$$(19) \lim_{m \rightarrow 0} U(m, c) = -\infty$$

O sea que, para que podamos descartar burbujas explosivas en el nivel de precios tiene que verificarse que cuando los saldos reales se amulan, no hay forma finita de compensar al individuo en términos de consumo de modo que su utilidad no se vea alterada al caer  $m$  indefinidamente. En este sentido es que decimos que el dinero tiene que ser esencial para poder descartar senderos hiperinflacionarios del nivel de precios.

## 5. Evaluación empírica de la existencia de burbujas

En la sección anterior presentamos algunos argumentos teóricos que, de una u otra manera cuestionan la existencia de burbujas especulativas a partir del análisis de las características de los modelos que potencialmente las contienen.

Como adelantamos en la Introducción de este trabajo, una línea de investigación paralela consistió en evaluar si las observaciones empíricas evidenciaban la presencia de burbujas especulativas.

Si bien ambos enfoques no deberían ser contradictorios en su naturaleza, el primero de ellos conlleva cierto grado de escepticismo acerca de la existencia de burbujas, relativizando entonces la necesidad de evaluar empíricamente un fenómeno que, según las conclusiones de este enfoque, es imposible que exista.

Las razones arguidas por aquellos investigadores que se pronuncian a favor del desarrollo de evaluaciones empíricas del fenómeno se hallan asociadas a que los tests de burbujas involucran evaluaciones conjuntas de las siguientes hipótesis: 1) el enfoque de expectativas racionales, 2) la correcta especificación de los "fundamentals" y 3) la existencia de burbujas. Es el interés en evaluar estas hipótesis lo que justifica e incentiva el desarrollo de tests.

Una evaluación exhaustiva y comparativa de los resultados obtenidos por ambos enfoques hasta el momento constituye un importante vacío en la literatura y llenarlo, seguramente, excede los alcances de esta modesta aproximación, en tiempo y objeto. Nos conformaremos con comentar los principales problemas que la evaluación empírica implica, las técnicas propuestas y algunos resultados obtenidos<sup>21</sup>.

---

<sup>21</sup> Una evaluación resumida de los resultados obtenidos por la aproximación empírica puede consultarse en Flood y Hodrick (1990) en donde abundan las referencias bibliográficas al respecto. Las referencias de



Un problema básico consiste en que los tests para detectar burbujas requieren una correcta especificación de los "fundamentals". Problemas de variables omitidas o de anticipación de shocks generan observaciones indistinguibles de las que podría generar una supuesta burbuja. La implementación de ciertos tests supone restricciones potenciales en la dinámica de un sistema que podrían a llevar a admitir la presencia de una burbuja especulativa cuando en realidad se trata de respuestas de los agentes ante sucesos observados por ellos y no por los modelos econométricos bajo los cuales dichos tests se llevan a cabo.

Una primera aproximación para detectar la presencia de burbujas determinísticas en la hiperinflación de Alemania fue llevada a cabo por Flood y Garber (1980), que trabajaron con un modelo similar al comentado en la sección 3, con oferta de dinero exógena. Los resultados obtenidos permiten rechazar la hipótesis nula de presencia de una burbuja determinística.

Una dificultad encontrada en este tipo de tests consiste en que el modelo econométrico utilizado incluye un regresor explosivo. Bajo estas condiciones, cualquier serie de tiempo, no importa cuán larga sea, es siempre una muestra pequeña y los teoremas centrales de límite no se aplican, con los problemas que esto causa a los procesos de inferencia estadística.

Algunas revisiones de este trabajo relajan la exogeneidad de la oferta de dinero, evalúan la presencia de burbujas estocásticas y aproximan el problema del regresor explosivo a través de estudios de corte transversal.

Representantes típicos de los tests utilizados para la detección de burbujas en los precios de activos son los tests de volatilidad. Shiller (1981) propone un test basado en la comparación de las varianzas de los precios observados y de los precios calculados con un modelo de previsión perfecta. Las críticas a este enfoque señalan que si los precios y los dividendos no son estacionarios tales varianzas no existen. También admiten la crítica de especificación comentada en el comienzo de esta sección sobre problemas de especificación de "fundamentals".

Diba y Hamilton proponen tests basados en las propiedades de estacionariedad de las series de tiempo. Se basan en que las burbujas tienen como media un sendero explosivo o una constante igual a cero. Esto implica que las primeras diferencias de una burbuja racional explosiva no tienen una media estacionaria. Por lo tanto, proponen utilizar tests de "cointegración"<sup>22</sup> para detectar diferencias en los órdenes de integración de

---

esta sección pueden encontrarse en este trabajo.

<sup>22</sup> La esencia del enfoque de cointegración consiste en que buscar relaciones de largo plazo entre dos o más variables, independientemente de lo que ocurra en el corto. Una serie es integrada de orden  $d$  cuando diferenciada  $d$  veces tiene una representación tipo ARMA, invertible y estacionaria. Se dice que dos series están cointegradas si además de tener

los precios y sus variables explicativas asociadas a "fundamentals". Diferencias en los órdenes de integración, adecuadamente especificadas, sugerirían la presencia de burbujas.

Si bien estos tests solucionan en alguna medida el problema de falta de especificación, no detectan burbujas racionales cuya no estacionariedad no se haga evidente en muestras finitas. Obviamente, también admiten las críticas propias de los tests de "raíces unitarias" para detectar órdenes de integración. Estos tests son complejos de implementar y sus resultados difíciles de evaluar cuando hay cambios estructurales bruscos que provocan saltos en las medias. En numerosos casos, un salto discontinuo en la media de un proceso estocástico estacionario es interpretado a la luz de estos test como evidencia de no estacionariedad en media.

Otra aproximación consiste en los "tests de especificación" que parten de una evaluación exhaustiva de la dinámica "período a período" (por ejemplo, de la ecuación de Euler asociada a los problemas de optimización) y luego comparan estos resultados con una evaluación del modelo en términos de fundamentals. Si los tests estadísticos impiden rechazar la especificación intertemporal del modelo pero rechazan la especificación de "fundamentals", entonces, se podría sugerir la presencia de una burbuja. Si bien estos tests en su esencia resuelven el problema de falta de especificación, requieren un esfuerzo metodológico importante a la hora de plantear el modelo utilizado para desarrollar los tests.

Estos contrastes empíricos fueron aplicados a numerosos episodios y, en términos generales, permitieron rechazar la hipótesis de presencia de burbujas.

---

el mismo orden de integración, existe un vector constante (vector de cointegración) que permita expresar a una combinación lineal de ambas como una serie integrada de orden cero. Una referencia obligatoria es Engle y Granger (1987).

## 6. Comentarios finales.

A lo largo del presente trabajo comentamos los principales aspectos teóricos y empíricos asociados al fenómeno de burbujas especulativas.

En la sección 3 mostramos cómo dos modelos sencillos son potenciales generadores de procesos explosivos en los precios cuando las expectativas se forman racionalmente. El análisis posterior sitúa a dichos procesos en un contexto de optimización intertemporal. Los resultados obtenidos del análisis de dichos casos sugieren que tales procesos son de difícil ocurrencia o, complementariamente, que su inexistencia como tales se encuentre condicionada a supuestos antiintuitivos.

En el caso del precio de un bien de capital, el modelo analizado permite descartar la presencia de burbujas positivas y negativas. Las complicaciones aparecen en el caso del nivel general de precios, en donde el modelo permite descartar la presencia de burbujas negativas, pero no así las positivas.

La discusión acerca de la relevancia de evaluar empíricamente la presencia de burbujas llama la atención sobre las dificultades de especificar correctamente los modelos utilizados, que podrían llevar a conclusiones erróneas a la hora de discernir si un suceso determinado fué o no una burbuja especulativa. Hasta el momento, los resultados obtenidos a partir de estos tests rechazan la hipótesis de existencia de burbujas, sugiriendo que las bruscas variaciones observadas en los precios tienen explicaciones asociadas a "fundamentals" más que a sucesos especulativos.

El debate sobre el tema se encuentra, en nuestra opinión, lejos de estar cerrado. En cuanto a lo "positivo" de la discusión, coincidimos con Garber (1990) en que *... "antes de que los economistas releguemos un suceso especulativo a lo inexplicable o a la categoría de burbuja, debemos agotar todas las explicaciones económicas razonables."* En este sentido la aproximación teórica y la empírica podrían ser útiles complementos.

La evidencia y cierta intuición acerca del tema, conduce a una mala utilización de los términos asociados al fenómeno. Un análisis meramente superficial conduce a confinar cualquier suceso explosivo en los precios al ámbito de lo inexplicable e irracional. No pocos análisis incluyeron términos como el de "burbuja" para referirse al episodio inflacionario ocurrido en la Argentina en 1989 sin ahondar en los procesos que lo desataron y provocaron su dinámica.

## Referencias Bibliográficas

Begg, David; (1982), *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics*, The John Hopkins University Press, Maryland.

Blanchard, Olivier y Fischer, Stanley; (1989), *Lectures on Macroeconomics*, The M.I.T. Press, Cambridge.

Brock, William; (1975), A simple perfect foresight monetary model, *Journal of Monetary Economics*, 1, april, pp.133-150.

Cagan, Phillip; (1956), The monetary dynamics of hiperinflation, en Milton Friedman (ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press.

Calvo, Guillermo; (1987), Tulipmania, en *The New Palgrave, Diccionario of Political Economy*, London, MacMillan.

Diba, Behzad y Grossman, Herschel; (1988), Rational inflationary bubbles, *Journal of Monetary Economics*, Vol.21, pp.35-36.

Diba, Behzad T.; (1989), Bubbles and Stock Price Volatility, mimeo, Georgetown University.

Engle, Robert y Granger, C.W.; (1987), Co-integration and error correction representation, estimation, and testing, *Econometrica*, vol. 55, No.2, pp. 251-276.

Flood, Robert, y Garber, Peter; (1980b) Market fundamentals versus versus price level bubbles, *The First Tests*, *Journal of Political Economy*, August, 88, 745-70.

Flood, Robert y Garber, Peter; (1980a), An Economic Theory of Monetary Reform, *Journal of Political Economy*, February, 88, 24-58.

Flood, Robert, y Hodrick, Robert; On testing for speculative bubbles, *Journal of Economic Perspectives*, Vol.4 No.2, spring, pp. 67-83, (1990).

Garber, Peter; (1990), Famous First Bubbles, *Journal of Economic Perspectives*, Vol.4 No.2, spring, pp. 35-54.

Gray, Jo Anna; (1984), Dynamic instability in rational expectations models: an attempt to clarify, *International Economic Review*, vol. 25, No.1, pp. 93-122.

Hamilton, J.D. and Whiteman, C., (1985), The Observable implications of Self-fulfilling expectations, *Journal of Monetary Economics*, vol 16, no 3, pp. 353-373.

Intrilligator, Michael; (1971), *Mathematical Optimization an Economic Theory*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

Keynes, John M.; (1936), Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero, Capítulo 12, Fondo de Cultura Económica, México.

Kindleberger, Charles; (1987), Bubbles, en The New Palgrave, Diccionario of Political Economy, London, MacMillan.

Leach, John; (1991), Rational Especulation, Journal of Political Economy, vol. 99, No.1

Mc Callum, Bennett; (1983), On non-uniqueness in rational expectations models, Journal of Monetary Economics 11, pp. 139-168.

Obstfeld, Maurice y Rogoff, Kenneth; (1983), Speculative hyperinflations in maximizing models. Can we rule them out?, Journal of Political Economy, vol.91, No.4.

Obstfeld, Maurice y Rogoff, Kenneth; (1986), Ruling out divergent speculative bubbles, Journal of Monetary Economics, 17, 349-362.

Sargent, Thomas; (1987), Macroeconomic Theory, Academic Press Inc., San Diego, California.

Sidrauski, Miguel; (1967), Inflation and Economic Growth, Journal of Political Economy, 75, Dec., pp. 793-810.

Takayama, Akira; (1985), Mathematical Economics, 2nd. Edition, Cambridge University Press.

Taylor, John; (1986), New econometric approaches to stabilization policy in stochastic models of macroeconomic fluctuations, en Griliches, Z and Intrilligator, M. (eds.) Handbook of Econometrics, Vol III.

San Andrés